



Aplicações de conceitos da matemática financeira

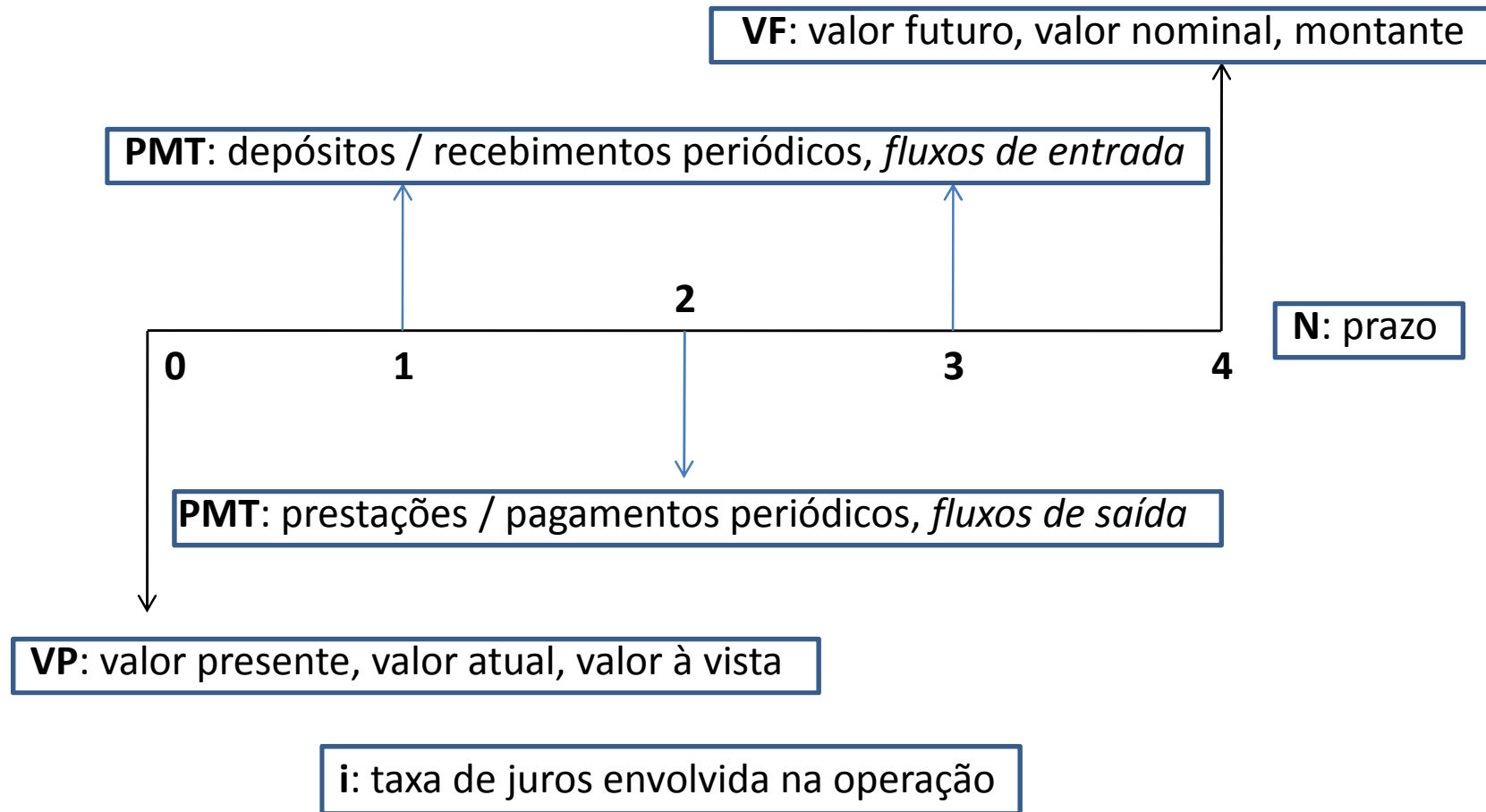
WERNKE, RODNEY. Gestão financeira:
ênfase em aplicações e casos nacionais.
Rio de Janeiro, Saraiva, 2008. Capítulo 2.

Aula de *Fernando Nogueira da Costa*
<http://fernandonogueiracosta.wordpress.com/>

Técnica para resolver problemas de matemática financeira

1. Compreender o significado das **5 variáveis** que costumam frequentar *a maioria das decisões financeiras* (**i, N, VP, VF, PMT**).
2. Saber posicioná-las em **diagrama de fluxo de caixa** (*representação gráfica*) com os eventos e valores associados é suficiente para elucidar *a maior parcela dos casos que requerem o uso de matemática financeira*.

Diagrama do fluxo de caixa



Dicas de matemática financeira

1. Nenhum problema envolve **todos os 5 conceitos ao mesmo tempo.**
2. Enquanto 1 destes 5 fatores não integra o problema em análise, os demais **4 elementos estão envolvidos na decisão financeira.**
3. Dos 4 envolvidos, **3 destes geralmente têm seus valores previamente definidos** no contexto em estudo.

Dicas de matemática financeira

4. Os fatores “**taxa de juros**” (i) e “**número de períodos**” (N) estarão **presentes em qualquer situação financeira examinada**, seja já definidos no problema, seja por encontrá-los.
5. Para determinar **o valor da variável desconhecida**, basta 1. *identificar os valores associados aos elementos que já constam do enunciado* e 2. *aplicar a fórmula específica*.

Taxa de juros associada a todas as operações financeiras

- O **principal fator** a ser considerado, nas *decisões que abrangem captação ou investimentos de recursos*, é a **taxa de juros (i)** envolvida nessas operações financeiras.
- Essa importância deriva do **raciocínio** que o **tomador de empréstimo** deve buscar *a menor taxa de juros possível* entre as fontes de financiamento que tiver acesso, assim como o **investidor** deve optar por *a maior taxa de juros de remuneração que conseguir*.

Valor do dinheiro no tempo

- **Valor do dinheiro no tempo:**
o capital emprestado (ou investido) em determinado período deve ser remunerado a uma taxa de juros que, ao menos, preserve o poder aquisitivo do valor originalmente utilizado.
- **Empréstimo sem juros com inflação:**
o capital emprestado perde capacidade de compra, pois a inflação eleva os preços durante o prazo de empréstimo, e ele não tem remuneração que permita manter o poder aquisitivo dos recursos emprestados.

Custo de oportunidade

- Os **custos não devem ser considerados absolutos**, mais iguais à *segunda melhor oportunidade de benefícios não aproveitada*.
- Quando *uma decisão exclui a escolha de outra*, deve-se considerar o *benefício não aproveitado decorrente da decisão alternativa* como **custo de oportunidade**.
- **Custo de oportunidade** representa *o valor que seria obtido na opção que é descartada em favor de outra*.

Diferença entre juros simples e compostos

- **Juros simples:** são *calculados exclusivamente sobre o capital inicial*, independentemente do período em que estejam sendo apurados.
- **Juros compostos:** são *calculados ao final de cada período e o valor respectivo é somado ao capital do início desse período*, formando novo valor denominado “**montante**”.
- *O mesmo procedimento é repetido nos demais períodos até que se extinga o prazo contratado.*

Exemplo de capitalização a juros simples

- Capital investido no início do 1º mês: \$ 10.000 (a)
- Juros do 1º mês ($\$10.000 \cdot 5\%$): \$ 500 ($b = a \cdot 5\%$)
- Juros do 2º mês ($\$10.000 \cdot 5\%$): \$ 500 ($c = a \cdot 5\%$)
- Juros do 3º mês ($\$10.000 \cdot 5\%$): \$ 500 ($d = a \cdot 5\%$)
- **Montante ao final do 3º mês: \$ 11.500**
($e = a + b + c + d$)

Exemplo de capitalização a juros compostos

- Capital investido no início do 1º mês: \$10.000 (a)
- Juros do 1º mês ($\$10.000 * 5\%$): \$ 500 ($b = a * 5\%$)
- **Montante ao final do 1º mês: \$10.500 ($c = a + b$)**
- Capital investido no início do 2º mês: \$10.500 (c)
- Juros do 2º mês ($\$10.500 * 5\%$): \$ 525 ($d = c * 5\%$)
- **Montante ao final do 2º mês: \$11.025 ($e = c + d$)**
- Capital investido no início do 3º mês: \$11.025 (e)
- Juros do 3º mês ($\$11.025 * 5\%$): \$ 551,25 ($f = e * 5\%$)
- **Montante ao final do 3º mês: \$11.576,25 ($g = e + f$)**

Usar os juros compostos a seu favor: fugir de dívidas!

- **Anatocismo** (*capitalização de juros*):
diferentemente da dívida com **juros simples**, quando *somente o principal rende juros*, em dívida com **juros compostos**, após cada período, *os juros devidos são incorporados ao principal* e passam, por sua vez, a *render juros*.
- Quando o devedor paga ao banco a **prestação**, contendo amortização do principal e juros contratados, ainda lhe são *exigidos novos juros sobre o saldo devedor*.
- Caso o devedor não pague ao banco nenhuma **prestação**, com taxas de juros de 15% ao ano, a *dívida dobra* em 5 anos; com 12% ao ano, **quase dobra** em 6 anos; e com 10% ao ano **dobra** em pouco mais de 7 anos.

Aspectos básicos da calculadora HP-12C

(lançada em 1981)



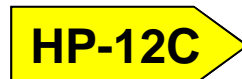
Teclas e funções financeiras

- **Funções brancas** (parte frontal das teclas)
- **n**: tempo
- **i**: taxa de juros
- **PV**: *Present Value*, Valor Presente
- **FV**: *Future Value*, Valor Futuro
- **PMT**: *Payments*, Pagamentos, Prestações, Depósitos
- **Funções amarelas** (tecla “f” aciona a função da parte superior das teclas)
- **AMORT**: amortização
- **INT**: valor dos juros, valor dos rendimentos
- **NPV**: *Net Present Value*, Valor Presente Líquido (VPL)
- **IRR**: *Internal Rate Return*, Taxa Interna de Retorno (TIR)
- **Funções azuis** (tecla “g” aciona a função inferior das teclas)
- **CFo**: *Cash Flow Zero*, Fluxo de Caixa na Data Zero / Inicial
- **CFj**: *Cash Flow Periodic*, Fluxo de Caixa do Período
- **Nj**: *Next Periodic*, Próximo Período
- **BEG**: *Begin*, Entrada
- **END**: *Final*, Primeira Parcela ao Final do Primeiro Período (sem parcela de entrada)

HP-12C

Operações matemáticas básicas

- A **lógica operacional da HP-12C** é baseada em *lógica matemática* conhecida como **Notação Polonesa Reversa** (RPN), em que *não se utiliza parêntesis e sinal de igual*.
- Distingue-se da **notação algébrica** que *posiciona os sinais (+, -, x, :) entre os números e, depois, sinal de igual*.
- No caso da HP-12C, estes **sinais (+, -, x, :)** são *posicionados depois*, dispensando-se o sinal de igual.
- Coloca-se o *primeiro número*, **ENTER**, *outro número*, **sinal (+, -, x, :)**.



Dicas de manuseio de HP-12C

- **Limpeza de dados do visor:** **CLx**: *Clear x* ou *Limpe x*.
- **Limpeza dos dados de cálculos financeiros:**
usar sempre rotina “**f REG f FIN**” (funções amarelas das teclas do grupo CLEAR) para novo cálculo financeiro.
- **Uso da tecla “CHS”** (*Change Signal*):
em cálculos com dois valores monetários,
um deles deve ser obrigatoriamente *negativo* (saída),
sob pena de aparecer mensagem de erro: “*error 5*”.

Dicas de manuseio de HP-12C

- **Dados na memória:** usar tecla “**STO**” (*Store*) e **número de registrador** (0 a 9) para armazenar; teclar “**RCL**” (*Recall*) para recuperar o valor da memória no **número do registrador** escolhido (0 a 9).
- **Nova operação de armazenamento de dados:** *apaga automaticamente o registrador*; para *apagar todos os registradores de uma só vez*: “**f REG**” (grupo CLEAR).
- **Cálculos com juros compostos inclusive em períodos fracionados:** tecle “**STO**” e “**EEX**” (tecla acima da tecla ENTER); aparece “**c**” no lado direito do visor.

Cálculos envolvendo datas

- **Fixar o formato brasileiro de datas** (dia, mês, ano)
“DDMMAA”: teclar “g D.MY” (função azul do número 4).
- **Número de dias entre datas**: teclar uma data, “ENTER”, outra data, “g Δ DYS” (função azul da tecla “EEX”).
- **Cálculo de data futura ou passada e respectivo dia da semana**: teclar uma data, “ENTER”, número de dias, “g DATE” (função azul da tecla “CHS”), aparecerá a *data* e número no canto direito do visor indicando o *dia da semana* (“1” para segunda-feira até “7” para domingo).

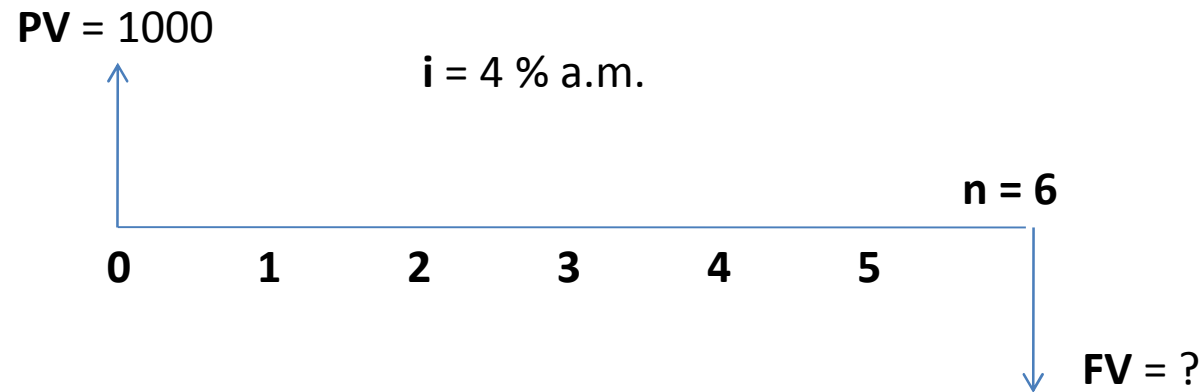
Exemplo de cálculo de data futura ou passada e respectivo dia da semana

- Data de nascimento: 28/09/1951
- Colocar os seguintes dados na calculadora:
- **28.091951 ENTER**
- **0** (zero) **g DATE**
- **28.09.1951 5**: mostra que o nascimento desta pessoa ocorreu na *sexta-feira* (quinto dia útil da semana), pois **1** significa *segunda-feira*.
- **Número de dias entre datas**: teclar 27.032009, “ENTER”, 28.091951, “g ΔDYS” (função azul da tecla “EEX”): -21.000

Valor Futuro (FV)

- **Valor Futuro (FV):**
ao se aplicar *quantia* hoje (**PV**)
em *taxa de juros* compostos (**i**)
por *prazo determinado* (**n**),
o *valor ao final do prazo* (**FV**) será formado por
o *capital investido* (valor presente **PV**) *mais*
os *juros acumulados* ($\sum i$) no período.

Tomando emprestado hoje microcrédito de R\$ 1.000 com prazo de 6 meses e taxa de juros de 4% ao mês, quanto o tomador deverá pagar no final do prazo?

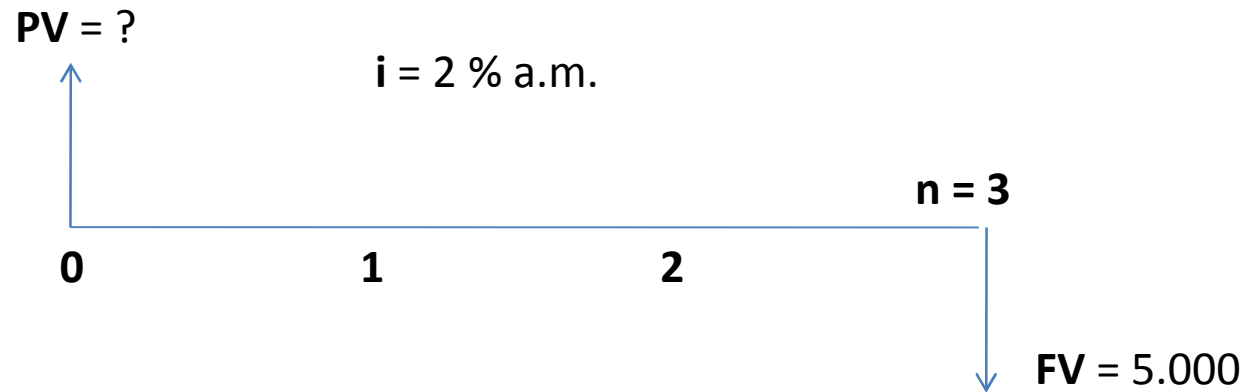


- **f REG f FIN:** *apagamento* dos registros financeiros anteriores.
- **1000 PV:** informando o *valor presente* (positivo, pois é entrada de empréstimo).
- **6 n:** inserindo *prazo em meses*.
- **4 i:** registrando a *taxa de juros mensal*.
- **FV:** solicitando o *valor futuro* pela função respectiva.
- **- 1.265,32:** resultado em reais (*valor negativo, pois é saída de pagamento*).

Valor Presente (PV)

- **Valor Presente (PV):**
é o valor na data de hoje (ou valor à vista) de um valor futuro (FV) oriundo de dívida ou investimento, descontado a determinada taxa de juros compostos (i), por seu respectivo prazo (n).

Comerciante recebeu cheque pré-datado, cujo valor é de R\$ 5.000,00, estabelecido para 3 meses a partir da data de recebimento. Se quiser trocar logo esse cheque por dinheiro, em banco que cobra juros mensais de 2%, qual valor receberia?

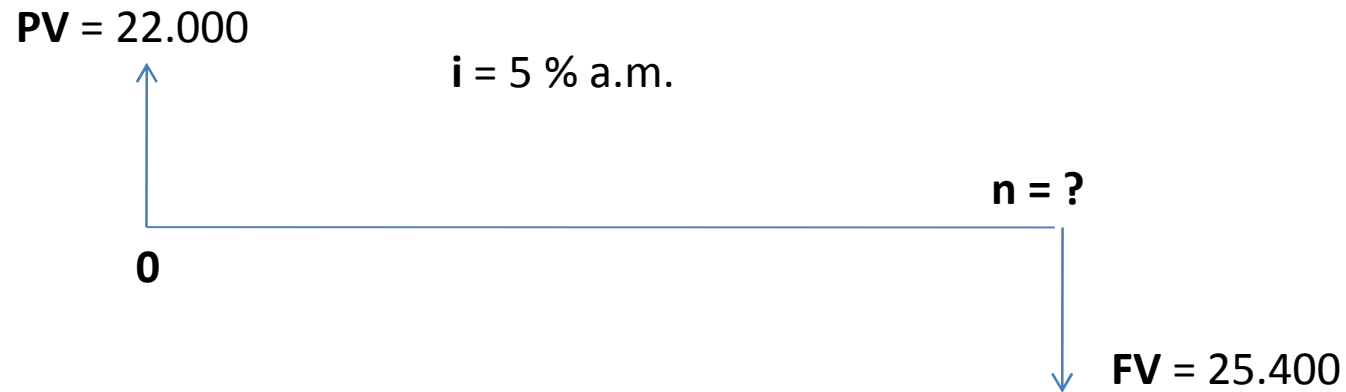


- **f REG f FIN:** *apagamento* dos registros financeiros anteriores.
- **5000 CHS FV:** informando o *valor futuro* (*negativo*, pois é *saída* de cheque).
- **3 n:** inserindo *prazo em meses*.
- **2 i:** registrando a *taxa de juros mensal*.
- **PV:** solicitando o *valor presente* pela função respectiva.
- **4.711,61:** resultado em reais (*valor positivo*, pois é *entrada* de caixa).

Prazo (n)

- **Prazo (n)**: expressa o *período* associado à decisão de *investimento* ou *financiamento*.
- O **prazo** deve ser *adequado* à *taxa de juros da negociação*, p.ex.,
se período *mensal*, taxa de juros *mensal*;
se período *anual*, taxa de juros *anual*; etc.
- Quando o **período de capitalização** não está indicado, toma-se como tal *a unidade de tempo a que se refere a taxa de juros*.

Assumindo-se dívida de R\$ 22.000,00, cujo valor total a pagar será de R\$ 25.400,00, considerando-se taxa de juros de 5% ao mês, em quanto tempo deverá ser paga?

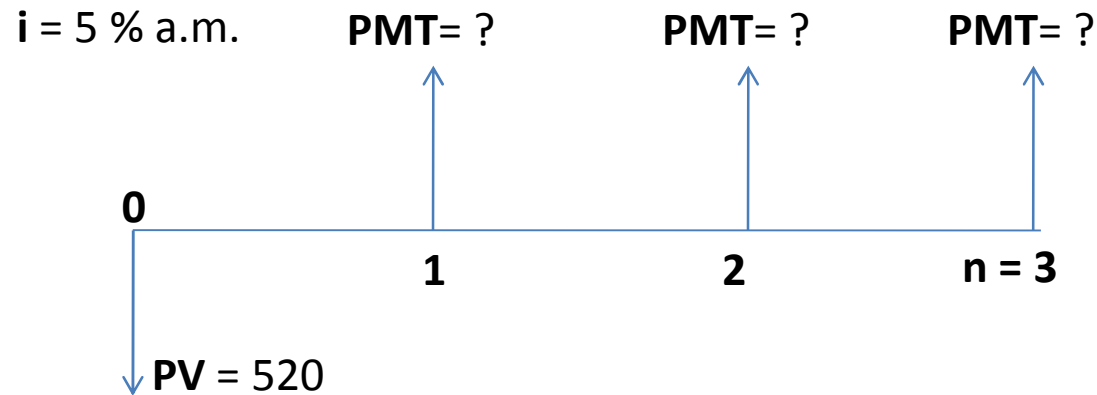


- **f REG f FIN:** *apagamento* dos registros financeiros anteriores.
- **22.000 PV:** informando o *valor presente* (*positivo*, pois é *entrada* de crédito).
- **25.400 CHS FV:** inserindo *valor futuro* (*negativo*, pois será *saída* de pagamento).
- **5 i:** registrando a *taxa de juros mensal*.
- **n:** solicitando o *prazo* pela função respectiva.
- **3,00:** resultado em *meses* (pois a taxa de juros é mensal).

Prestações sem entrada (PMT)

- O **valor das prestações (PMT)** equivale aos *pagamentos efetuados*, periodicamente, para *saldar dívida* contratada por determinada *taxa de juros e prazo* específico.
- A **periodicidade dos pagamentos** deve ser *equivalente à da taxa contratada*: se taxa de juros mensal, pagamentos mensais, etc.
- No **caso de prestações sem o valor de entrada**, a primeira parcela deve ser paga *ao final do primeiro período*, geralmente, mês.

O valor da mercadoria à vista é R\$ 520,00. Caso a compra seja a prazo, a taxa de juros será de 5% ao mês para venda com prazo de 3 meses. Supondo venda sem entrada, qual será o valor de cada prestação?

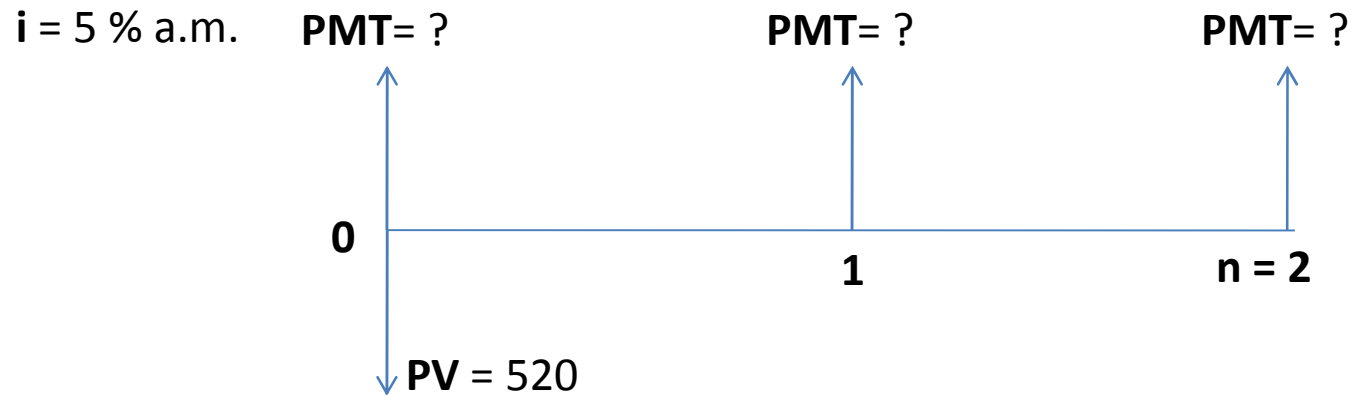


- **f REG f FIN:** *apagamento* dos registros financeiros anteriores.
- **520 CHS PV:** informando o *valor presente* (*negativo*, pois é *saída* de mercadoria).
- **3 n:** inserindo *prazo* (em *meses*).
- **5 i:** registrando a *taxa de juros mensal*.
- **PMT:** solicitando o *valor da prestação* pela função respectiva.
- **190,95:** resultado em reais (*valor positivo*, pois é *entrada* de caixa).

Prestações com entrada (PMT)

- Quando há o *pagamento de parcela* a título de **entrada**, podem ser adotados dois caminhos:
 1. *Deduzir o valor da parcela a ser dada como entrada do valor à vista* e, em seguida, executar a rotina de cálculo pela HP-12C;
 2. Usar as teclas “g” e “**BEG**” (função azul da tecla “7”) e *manter o procedimento descrito*.

O valor da mercadoria à vista é R\$ 520,00. Caso a compra seja a prazo, a taxa de juros será de 5% ao mês; para venda com entrada (“1 +2”), qual será o valor de cada prestação?



- **f REG f FIN:** *apagamento dos registros financeiros anteriores.*
- **520 CHS PV:** *informando o valor presente (negativo, pois é saída de mercadoria).*
- **3 n:** *inserindo prazo (em meses).*
- **5 i:** *registrando a taxa de juros mensal.*
- **g BEG:** *informando que a primeira prestação será antecipada (como entrada).*
- **PMT:** *solicitando o valor da prestação pela função respectiva.*
- **181,86:** *resultado em reais (valor positivo, pois é entrada de caixa).*

Propaganda enganosa

- **Anúncio em loja:** “à vista, 10% de desconto; a prazo, em 1 + 2 parcelas sem juros”. Possuindo condição de pagar à vista, **qual é a melhor opção?**
- **Simulação:**
- **Preço de etiqueta:** R\$ 100
- **Preço à vista:** R\$ 90
- **Venda a prazo:** 3 parcelas de R\$ 33,33, sendo a primeira dada como entrada.
- **Valor financiado:** R\$ 56,67
- **f REG f FIN**
- **56.67 CHS PV**
- **33.33 PMT**
- **2 n**
- **i**
- **11,54** (resultado em % ao mês > taxa de juros de cheque especial: > HSBC: 9,97% a.m. em 18/02/09)

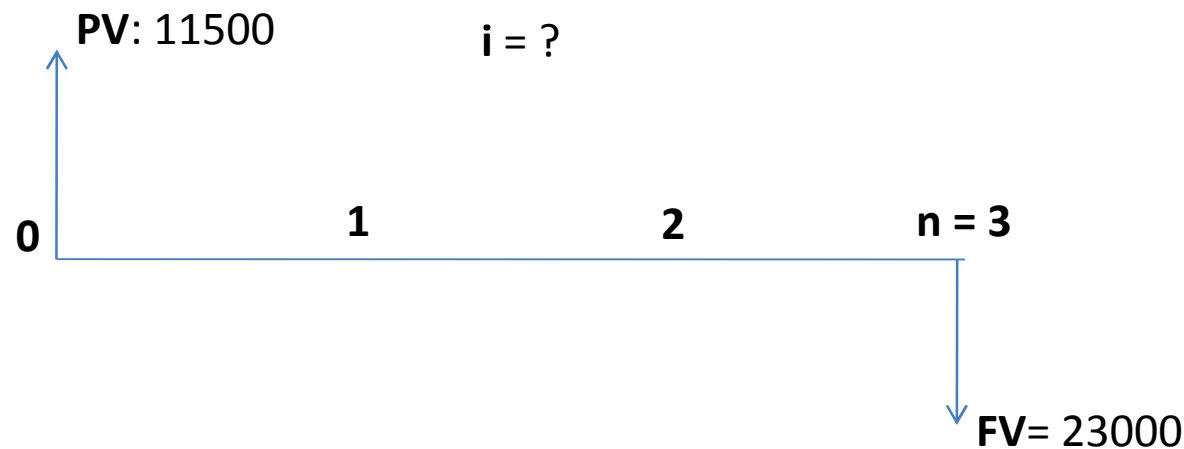
Depósitos para atingir valor futuro

- As **prestações (PMT)** podem ser vistas como similares a *depósitos periódicos para obtenção de quantia desejada no futuro*.
- Neste caso, cada **depósito (PMT)** efetuado renderá a *taxa de juro* contratada por todo o prazo previsto, *acumulando ao final do período determinado valor futuro*.

Taxa de juros (i)

- A **taxa de juros** costuma ser visto como *o fator mais importante nas decisões de financiamento* (ou tomada de empréstimo) e de **investimento** (aplicação) de recursos.
- O **percentual da taxa de juros** representa *a remuneração a ser obtida pelo investidor* ao final de determinado prazo.
- Sob o ponto de vista do **captador de recursos**, expressa *o percentual de juros que este pagará ao financiador*, além do *capital tomado emprestado* ao término do prazo contratado.

Qual é a taxa de juros cobrada pelo banco, se o valor tomado emprestado hoje é de R\$ 11.500,00, com prazo de pagamento de 3 meses, se o devedor terá que pagar R\$ 23.000,00 ao final?



- **f REG f FIN:** *apagamento* dos registros financeiros anteriores.
- **11500 PV:** informando o *valor presente* (*positivo*, pois é *entrada* de crédito).
- **23000 CHS FV:** inserindo o *valor futuro* (*negativo*, pois é *pagamento* de crédito)
- **3 n:** inserindo *prazo* (em meses).
- **i:** solicitando a *taxa de juros mensal* pela função respectiva.
- **25,99:** resultado em *% ao mês* (pois o prazo era mensal).

Taxas equivalentes

- Duas ou mais **taxas** são ditas **equivalentes** quando, ao serem aplicadas sobre *o mesmo capital*, durante *o mesmo prazo*, produzem *montante igual*.
- A **taxa de juros** que indica essa **equivalência** pode estar *expressa em qualquer prazo*, bem como pode ser *convertida para outro prazo* qualquer, *sem alterar seu valor intrínseco*, ou seja, mantém a **equivalência existente** entre os valores realizáveis em diferentes datas.

Programa de cálculo da taxa equivalente para HP-12C

- **f P/R** (função amarela da tecla R/S, acima de ON)
- **f PRGM** (função amarela da tecla R↓, acima de “g”)
- **X><Y** (tecla acima de STO)
- **1 0 0 : 1 +** (algarismos e sinais)
- **X><Y** (tecla acima de STO)
- **y^x** (tecla abaixo da tecla “n”)
- **1 - 1 0 0 x** (algarismos e sinais)
- **f P/R** (função amarela da tecla R/S, acima de ON)
- **Obs.: não se preocupar com o que aparece no visor.**

Uso do programa de equivalência

De taxa maior (mês)
para taxa menor (dia):

- Ex.: de 30% *ao mês*
para *taxa diária*:
- **30 ENTER**
- **30 1/x** (dias e tecla branca
do grupo BOND)
- **R/S** (tecla branca)
- 0,878383...
ou **0,88 % ao dia**

De taxa menor (mês)
para taxa maior (ano):

- Ex.: de 1% *ao mês*
para *taxa anual*:
- **1 ENTER**
- **12 R/S**
- 12,68
ou **12,68% ao ano**

Taxa real de juros (iR)

- Sempre que o período contiver **inflação** é necessário *excluir esta variação inflacionária* para determinar a “**taxa real**” (iR) de juros da aplicação.
- Caso contrário, a taxa apurada é denominada “**taxa nominal**” (i) de juros.
- Não basta subtrair a **taxa de inflação** no período da **taxa de juros** do mesmo prazo.

Programa de cálculo da taxa real de juros para HP-12C

- **f P/R** (função amarela da tecla R/S, acima de ON)
- **f PRGM** (função amarela da tecla R↓, acima de “g”)
- **RCL** (tecla à esquerda de ENTER na última linha)
- **i** (tecla branca com função taxa de juros)
- **1 0 0 +** (algarismos e sinais)
- **RCL** (tecla à esquerda de ENTER na última linha)
- **1 1 0 0 + : 1 - 1 0 0 x** (algarismos e sinais)
- **f P/R** (função amarela da tecla R/S, acima de ON)
- **Obs.: não se preocupar com o que aparece no visor.**

Cálculo da taxa real de juros (iR)

- Ex.: a **taxa nominal de aplicação financeira** ofereceu 12,75% de rendimento anual. Se a **taxa de inflação**, no mesmo período, foi de 4,5%, qual foi a **taxa real de juros** obtida pelo investidor?
- **f REG**
- **12.75 i**
- **4.5 STO**
- **1 R/S**
- **7,89 % ao ano (taxa real)**

Plano de aposentadoria

Se aplicar mensalmente R\$ 1.000 com taxa de juros de 0,5% ao mês, durante 35 anos, quanto se acumula sem nenhuma retirada?

- f REG f FIN
- 1000 CHS PMT
- 0,5 i
- 420 n
- FV
- **1.424.710,30** (resultado em reais equivalente ao valor acumulado após 420 meses)

Com a expectativa de usufruir desse valor durante 20 anos, quanto se poderia retirar, mensalmente, deixando o restante aplicado nas mesmas condições?

- f REG f FIN
- **1.424.710,30** PV
- 240 n
- 0,5 i
- PMT
- **-10.207,07** (resultado em reais equivalente ao valor da retirada durante 240 meses até o saldo ser zerado) X R\$ 3.218,90 (INSS)

Plano de ficar milionário

- Querendo ficar “**milionário**” em **20 anos** e supondo conseguir aplicar com taxa de juros de **1% ao mês**, quanto se deveria aplicar mensalmente?
- **f REG f FIN**
- **1000000 FV**
- **240 n**
- **1 i**
- **PMT**
- **-1.010,86** (resultado equivalente em reais a ser aplicado durante 240 meses)



fercos@eco.unicamp.br

<http://fernandonogueiracosta.wordpress.com/>